



板块一 三角函数与平面向量

微专题 解三角形

应用正弦定理、余弦定理解三角形是高考的必考内容，主要考查边、角、面积、周长等的计算，既有选择、填空题，也有解答题，难度为中档或偏下.

热点突破

热点一 利用正、余弦定理求边或角

热点二 三角形的面积问题

热点三 解三角形的实际应用

精准强化练

知识梳理

1. 正弦定理和余弦定理

定理	正弦定理	余弦定理
内容	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径)	$a^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}{}$; $b^2 = \frac{c^2 + a^2 - 2ac \cos B}{}$; $c^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}{}$

定理	正弦定理	余弦定理
变形	(1) $a=2R\sin A$, $b=\underline{2R\sin B}$, $c=\underline{2R\sin C}$; (2) $a : b : c = \underline{\sin A : \sin B : \sin C}$; (3) $a\sin B=b\sin A$, $b\sin C=c\sin B$, $a\sin C=c\sin A$	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2. $\triangle ABC$ 的面积公式

$$(1) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h (h \text{ 表示边 } a \text{ 上的高}).$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

$$(3) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (a+b+c)r$$

常见结论

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$.

2. 三角形中的三角函数关系

$$(1) \sin(A + B) = \sin C.$$

$$(2) \cos(A + B) = -\cos C.$$

$$(3) \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$$

$$(4) \cos \frac{A + B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

热点一 利用正、余弦定理求边或角

例1

(2024·新高考 I 卷)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\sin C = \sqrt{2} \cos B, \quad a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab.$$

(1)求 B ;

热点一 利用正、余弦定理求边或角

例1

(2024·新高考 I 卷)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\sin C = \sqrt{2} \cos B, \quad a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2} ab.$$

(1)求 B ;

解

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi, \quad \therefore C = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \sqrt{2} \cos B = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \therefore \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } 0 < B < \pi, \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

热点一 利用正、余弦定理求边或角

例2

(新高考Ⅱ卷)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2$.

(1)求 A ;

热点一 利用正、余弦定理求边或角

例2

(新高考 II 卷)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2$.

(1)求 A ;

解

由 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2$, 得 $\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A = 1$,

所以 $\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$,

所以 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$.

(2)若 $a=2$, $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2)若 $a=2$, $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

解

由 $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$, 得 $\sqrt{2}b\sin C=2c\sin B\cos B$,

由正弦定理, 得 $\sqrt{2}bc=2cbc\cos B$,

所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

$$C=\pi-(A+B)=\frac{7\pi}{12},$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \sin C &= \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

解

$$\text{由正弦定理得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{7\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$.

规律方法

当题目条件中出现边和角的“混和体”时有两种方案：(1)全部统一为角，将“边的齐次式”中的边直接化为对应角的正弦；(2)全部统一为边，利用正、余弦定理将角转化为边，最后用因式分解等代数技巧化简即可.

训练1

(1)(济南模拟)已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C = b$, 则 $A =$

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

训练1

(1)(济南模拟)已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C = b$, 则 $A =$

- ☒ A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

解析

由 $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C = b$ 以及正弦定理可得
 $\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C = \sin B$,
因 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$,
代入整理得 $\sqrt{3}\sin A\sin C - \cos A\sin C = 0$,
因为 $0 < C < \pi$, $\sin C > 0$, 则得 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又因为 $0 < A < \pi$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$.

热点二 三角形的面积问题

例2

(阜阳模拟)在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,

且 $a \sin A \cos B + b \sin A \cos A = \sqrt{3} a \cos C$.

(1)求角 C 的大小;

热点二 三角形的面积问题

例2

(阜阳模拟)在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,

且 $a \sin A \cos B + b \sin A \cos A = \sqrt{3} a \cos C$.

(1)求角 C 的大小;

解

法一 因为 $a \sin A \cos B + b \sin A \cos A = \sqrt{3} a \cos C$,
所以根据正弦定理得 $\sin A \sin A \cos B + \sin A \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin A \cos C$,
因为 $\sin A \neq 0$,
所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \sqrt{3} \cos C$,
即 $\sin(A+B) = \sqrt{3} \cos C$, 即 $\sin C = \sqrt{3} \cos C$.
因为 $\cos C \neq 0$, 所以 $\tan C = \sqrt{3}$.
因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

解

法二 由三角形内的射影定理知 $a \cos B + b \cos A = c$,

所以 $a \sin A \cos B + b \sin A \cos A = (a \cos B + b \cos A) \sin A = c \sin A = \sqrt{3} a \cos C$,

又由正弦定理得 $\sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C$,

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin C = \sqrt{3} \cos C$,

因为 $\cos C \neq 0$, 所以 $\tan C = \sqrt{3}$,

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2)若 $a=3$, 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(2)若 $a=3$, 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}=1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = bc \cos A = 1$. 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

所以 $b^2 + c^2 = 9 + 2bc \cos A = 11$. ①

因为 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

所以 $b^2 - c^2 = 2ab \cos C - a^2 = 2 \times 3 \times b \times \cos \frac{\pi}{3} - 3^2 = 3b - 9$. ②

联立①②可得 $2b^2 - 3b - 2 = 0$,

解得 $b = 2$ (负根舍去),

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

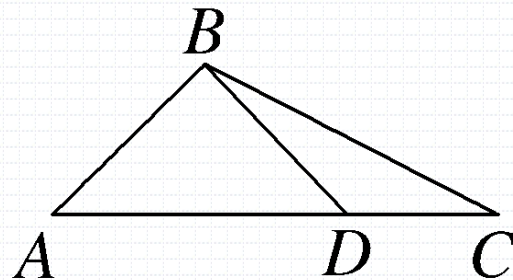
规律方法

与三角形面积有关问题的解题策略：(1)利用正弦、余弦定理解三角形，求出三角形的相关边、角之后，直接求三角形的面积；
(2)把面积作为已知条件之一，与正弦、余弦定理结合求出三角形的其他量.

训练2

(湛江调研)如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $AB \perp BD$. 已知

$$\cos A = 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{\angle ABC + C}{2}, \quad AB = \sqrt{2}.$$



(1)求 A ;

解

$$\text{因为 } \cos A = 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{\angle ABC + C}{2} = 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{\pi - A}{2} = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin A,$$

$$\text{可得 } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = 1,$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{4}.$$

(2)若 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 求 BC .

解

作 $BE \perp AC$, 垂足为 E , 在 $\triangle ABD$ 中, 由 $A = \frac{\pi}{4}$,

$AB \perp BD$, 知 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形,

因为 $AB = \sqrt{2}$, 所以 $BD = \sqrt{2}$, $AD = 2$, $BE = 1$,

由 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}BE \cdot CD = \frac{1}{2}$,

解得 $CD = 1$, 可得 $AC = AD + CD = 3$,

所以 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{5}$.

热点三 解三角形的实际应用

例3

(1)(临沂模拟)在同一平面上有相距 14 公里的 A , B 两座炮台, A 在 B 的正东方.某次演习时, A 向西偏北 θ 方向发射炮弹, B 则向东偏北 θ 方向发射炮弹, 其中 θ 为锐角, 观测回报两炮弹皆命中 18 公里外的同一目标 C , 接着 A 改向西偏北 $\frac{\theta}{2}$ 方向发射炮弹, 弹着点为 18 公里外的点 M , 则 B 炮台与弹着点 M 的距离为

A.7公里

B.8公里

C.9公里

 D.10公里

解析

依题意，设炮弹第一次命中点为 C ，则 $AB = 14$ ， $AC = BC = AM = 18$ ，

$$\angle CBA = \angle CAB = \theta, \quad \angle MAB = \frac{\theta}{2},$$

在 $\triangle ABC$ 中 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \theta$ ，

$$\text{即 } 18^2 = 14^2 + 18^2 - 2 \times 14 \times 18 \cos \theta,$$

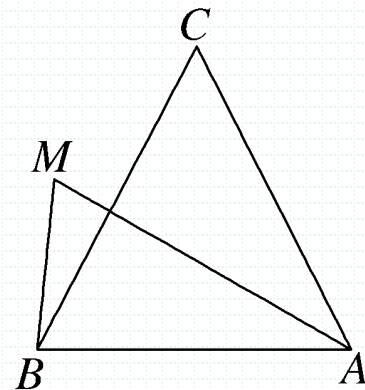
$$\text{解得 } \cos \theta = \frac{7}{18}, \text{ 所以 } \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{7}{18},$$

$$\text{又 } \theta \text{ 为锐角, 解得 } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{5}{6} \text{ (负值舍去),}$$

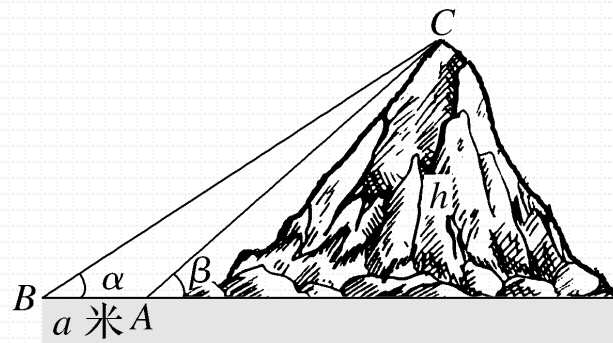
$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 中 } BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cos \frac{\theta}{2} = 18^2 + 14^2 - 2 \times 18 \times 14 \times \frac{5}{6} =$$

$$100, \text{ 所以 } BM = 10,$$

即 B 炮台与弹着点 M 的距离为10公里.



(2)(武汉模拟)某校数学建模社团对校外一座山的高度 h (单位: m) 进行测量, 方案如下: 如图, 社团同学朝山沿直线行进, 在前后相距 a 米两处分别观测山顶的仰角 α 和 β ($\beta > \alpha$), 多次测量相关数据取平均值后代入数学模型求解



山高, 这个社团利用到的数学模型 $h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$; 多次测量取平均值是中学物理测量中常用的减小误差的方法之一, 对物理量进行 n 次测量, 其误差 ε_n 近似满足 $\varepsilon_n \sim N\left(0, \frac{2}{n}\right)$, 为使误差 ε_n 在 $(-0.5, 0.5)$ 的概率不小于 0.997 3, 至少要测量 72 次. 参考数据: 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.997 3$.

解析

在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin (\beta - \alpha)}$, $AC = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$,

$$h = AC \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

由于 $P(-3\sigma < \varepsilon_n \leq 3\sigma) = 0.9973$,

$$\text{因此 } 3\sigma = 3\sqrt{\frac{2}{n}} \leq 0.5,$$

所以 $n \geq 72$, 故至少要测量72次.

规律方法

解三角形应用问题的要点

- (1)从实际问题中抽象出已知的角度、距离、高度等条件，作为某个三角形的元素；
- (2)利用正弦、余弦定理解三角形，得到实际问题的解.